EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS CH-TB

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Il sera tenu compte, dans la notation, de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle de la copie.

Dans tout le problème , a et b sont deux nombres réels strictement positifs et f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

Aux nombres a et b , on associe les deux suites α et β définies par :

$$\alpha_0 = a \quad \text{et} \quad \beta_0 = b \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right)$$

On propose tout d'abord, dans la première partie, de montrer que ces deux suites admettent une limite commune notée $\Phi(a,b)$, dite moyenne arithmético-géométrique de a et b, et d'établir une relation entre f et la fonction φ définie par $\varphi(x) = \Phi(1,x)$ puis, dans la deuxième partie, une étude de la fonction φ à partir de la relation précédente et des propriétés de la fonction f.

PREMIERE PARTIE

1° La moyenne arithmético-géométrique de a et b .

a. Montrer que les suites α et β sont convergentes vers la même limite notée $\Phi(a,b)$.

b. Comparer $\Phi(b,a)$ et $\Phi(a,b)$.
k étant un réel strictement positif, exprimer $\Phi(ka,kb)$ en fonction de k et de $\Phi(a,b)$.
En déduire que l'étude des nombres $\Phi(a,b)$ peut être remplacée par celle de la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \Phi(1,x)$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près de $\varphi(2)$.

2° Etude d'une intégrale invariante sur les couples (α_n , β_n).

Pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, on définit l'intégrale :

$$I(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}}$$

a. Calculer $v(x)$.
Donner un équivalent de $v(x)$ en 0.

b. Montrer que si $0 < x \leq 1$ alors $v(x) - u(x)$ est borné.

(On pourra, par exemple, utiliser l'intégrale $\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)\frac{dt}{t}$ après en avoir prouvé l'existence).

En déduire un équivalent de $u(x)$ en 0.

c. Utiliser les résultats précédents pour obtenir des équivalents en 0 de $f(x)$ puis de $\varphi(x)$.

d. Exprimer $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de x et de $\varphi(x)$ et en déduire un équivalent de $\varphi(x)$ en $+\infty$.

6° **Etude de φ au voisinage de 1.**

On note γ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbf{N})\left(\gamma_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)$

et, pour $-1 < x$, g la fonction définie par : $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + x\cos^2(\theta)}}$

L'étude de φ au voisinage de 1 va se réduire à l'étude de g au voisinage de 0.

a. Soit δ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbf{N})\left(\delta_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \, d\theta\right)$
Etablir une relation de récurrence entre δ_{n+1} et δ_n puis exprimer δ_n en fonction de γ_n.

b. Exprimer le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur $]-1,1[$ à l'aide des termes de la suite γ.

c. Soit θ un réel donné, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, donner le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1 + x\cos^2(\theta)}}$.
Préciser son rayon de convergence.

d. En utilisant le développement en série précédent (on admettra que l'intégrale de la série est égale à la série des intégrales), montrer que la fonction g est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Ce développement s'écrivant $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$, exprimer les coefficients g_n en fonction de γ_n et de n.

e. Pour $-1 < h < 1$, montrer que $\varphi(1+h) = \frac{\pi}{2\,g(2h+h^2)}$

En utilisant un développement limité de $g(2h+h^2)$ au voisinage de $h = 0$, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $\varphi(x)$ au voisinage de $x = 1$.